École Normale Supérieure de N'Djaména

Concours d'entrée en première année

FILIÈRES : MATHÉMATIQUES & PHYSIQUE-CHIMIE ... **Épreuve de Mathématiques** ... ANNÉE ACADÉMIQUE : 2021-2022

Durée : 2h 00mn

Exercice 1

On considère les nombres

$$z_1 = \left(\sqrt{3}+1\right)(1+\mathrm{i}) \quad \text{et} \quad z_2 = \left(\sqrt{3}-1\right)(-1+\mathrm{i}).$$

1. Calculer le module et l'argument des nombres complexes z_1 et z_2.
2. On pose $u = z_1 \times z_2 \quad$ et $\quad v = \dfrac{z_1}{z_2}$.
   Déterminer le module l'argument des nombres complexes u et v.
3. On pose $w = z_1 + z_2 \quad$ et $\quad t = z_1 - z_2$.
   Déterminer le module et l'argument des nombres complexes w et t.
   En déduire le module et l'argument du nombre complexe $x = z_1^2 - z_2^2$.

Exercice 2

Une caisse contient 10 cubes bleus, 22 cubes jaunes et 4 cubes rouges, tous de la même taille.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les couleurs du drapeau tchadien :
   En prenant simultanément 3 cubes ?
2. Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre sans remise, d'obtenir dans l'ordre les couleurs du drapeau tchadien ?
3. Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre avec remise, d'obtenir dans l'ordre les couleurs du drapeau tchadien ?

Problème

On considère la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $]0\,,\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 6\frac{\ln x}{x}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal, l'unité graphique étant de 2 cm sur l'axe des abscisses et $0,5$ cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
2. En étudiant le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3 - 3\ln x$, montrer que pour tout x réel strictement positif, on a $g(x) > 0$.
3. Calculer la dérivée de f. En se servant de la question précédente, étudier le sens de variation de f. Établir le tableau de variation de f.
4. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

5. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la demi parabole $(\mathscr{C}_1)$ d'équation $y = x^2$, $x \geq 0$.

   Préciser le comportement des deux courbes l'une par rapport à l'autre quand x tend vers $+\infty$.

6. Tracer sur le même graphique $(\mathscr{C})$, (T) et $(\mathscr{C}_1)$.

7. Montrer graphiquement que, quelle que soit la valeur du réel m, l'équation $f(x) = m$ a une solution et une seule.

8. Soit α un réel vérifiant $\alpha \geq 1$.

   a. Calculer $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \left(f(x) - x^2\right) \mathrm{d}x$.

   b. Interpréter géométriquement le résultat.

   c. Calculer $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.