École Normale Supérieure de N'Djaména

Concours d'entrée en première année

FILIÈRES : MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE-CHIMIE ... **Épreuve de Mathématiques** ... ANNÉE ACADÉMIQUE :

Durée : 2h 00mn

Exercice 1

Une urne A contient 3 boules noires et 2 boules blanches. Une urne B contient 2 boules noires et 2 boules blanches.
On suppose que dans l'urne A les cinq boules ont la même probabilité d'être tirées ; même hypothèse pour les quatre boules de l'urne B.

1. On tire sans remise, deux boules de A et une boule de B.

a. Quelle est la probabilité pour que les trois boules obtenues soient noires ?

b. Quelle est la probabilité pour que les trois obtenues soient de même couleur ?

2. On considère la variable aléatoire X qui à chaque épreuve constituée d'un tirage de deux boules de A et d'une boule de B, associe le nombre de boule blanche figurant dans ce tirage.

a. Déterminer la loi de probabilité de X (c'est-à-dire déterminer les probabilités d'obtenir respectivement 0, 1, 2, 3 boules blanches).

b. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z) = \left(z^2+3\right) Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$

a. Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Placer les points A, B, C et D.

Problème

I. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x^3} - 6\dfrac{\ln x}{x^3}$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation et en déduire pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

II. Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{3\ln x}{x^2}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique sur les axes 1 cm).

1. **a.** Calculer la dérivée de f et préciser son sens de variation (on remarquera que la dérivée première de f donne g).

   b. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   c. En déduire le tableau de variation de f.

2. **a.** Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f et préciser sa position par rapport à cette courbe.

   b. Préciser les ordonnées des points d'abscisses $0,5$, 1, 2 et 3.

   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

3. Tracer $(\mathscr{C})$.

4. Calculer l'aire du domaine plan compris entre la droite $(\mathscr{D})$, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.