Institut National Supérieur de Pétrole de Mao (INSPM)

Concours d'entrée en première année

Épreuve de Mathématiques

Durée : 2h 00mn

Exercice 1

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « les boules tirées sont de même couleur ».

   E_2 : « les boules tirées sont de couleurs différentes ».

2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

   a. Établir la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1. Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

   En déduire que : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2$.

   a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

   b. Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3+x)\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_{-3}^{0} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples $(x\,;\,y)$ tels que $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ et $x \leqslant 0$.
5. **a.** Démonter que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α, la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.

   b. Plus généralement, déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$.